積分の有名公式

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

この公式は特に面積を求めるときに多く使われます。

しかし、極大値と極小値の差を求めたり、その他の積分計算にも利用することがしばしばです。

まずは、しっかりと証明を出来るようにしましょう。

（証明１）

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\left\{(x-\alpha)+\alpha-\beta\right\}dx \qquad \Leftarrow (x-\alpha)\text{という固まりを作る}$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\right\}dx \qquad *$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta} \qquad \Leftarrow \int(x-\alpha)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\beta-\alpha)^2 \qquad (C\text{は積分定数})$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

これは途中で合成関数の積分を用いてあります。

このやり方は計算の幅を広げてくれます。是非、やり方をここで覚えてください。次のページにコツコツとやる方法で証明してあります。

（証明２）

＊の式を使わない場合は

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\left\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\left(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2\right)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\left\{-(\beta-\alpha)^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$