必勝の一題

入試でもよく使われる無限展開の式です（テラー展開）。

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

これらが題材にされた今年の入試問題です。

‘０６　早稲田大理工

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x) = e^x \ ,\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

によって定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 1$ に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f_n(x)$$

を示せ。

(2)　$n \geqq 1$ とする。$x \geqq 0$ に対して、不等式

$$0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{x^2}{n!} e^x$$

を示せ。

(3)　$\lim_{n \to \infty} f_n(1)$ を求めよ。