必勝の１題

さて、ここでは受験生が落としてはいけない問題、合否を分ける問題を取り上げて解説をしていきます。

第１問は'０１東工大　被積分関数に絶対値がついている定積分の問題。このタイプは場合わけがしっかりできるかがポイントです。

まずは解説を読まずにやってみてください。

> 問題１
>
> $a>0$，$t>0$　に対して定積分 $S(a,t)=\int_0^a \left| e^{-x}-\dfrac{1}{t} \right| dx$　を考える。
>
> (1)　aを固定したとき、tの関数 $S(a,t)$の最小値$m(a)$を求めよ。
>
> (2)　$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$　を求めよ。

（解説）

$|\quad|$の中の＋，－を分けるのはe^{-x}と$\dfrac{1}{t}$の大小です。

そこで、この二つをグラフにして大小比較をします。

$$\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$ ……＊として、まず連立をして交点を求めます。

$e^{-x} = \dfrac{1}{t} \rightleftarrows \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{t} \rightleftarrows e^x = t \qquad \therefore x = \log t$

これにより＊の２つのグラフは右図のようになります。

$a > 0$より､$\log t$ とa の大小により（ｉ）（ⅱ）　（ⅲ）の場合わけをします。

（ｉ）　$a \leqq \log t$　($t \geqq e^a$) のとき

$$S(a,t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x \right]_0^a$$

$$= -e^{-a} - \frac{1}{t}a + e^0$$

$$= -e^{-a} - \frac{1}{t}a + 1$$

このとき

$\dfrac{d}{dt}S(a,t) = \dfrac{a}{t^2} > 0$　これより$t \geqq e^a$ のとき$S(a,t)$は単調増加なので最小値 $m(a)$は

$$m(a) = S(a, e^a) = -e^{-a} - \frac{a}{e^a} + 1$$

（ⅱ）　$a \geqq \log t \geqq 0$のとき

$$f(t) = \int_0^{\log t} \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx - \int_{\log t}^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x \right]_0^{\log t} - \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x \right]_{\log t}^a$$

$$= 2\left(-e^{-\log t} - \frac{1}{t}\log t \right) + e^0 + e^{-a} + \frac{1}{t}a$$

$$= -\frac{2(1+\log t)}{t} + 1 + e^{-a} + \frac{1}{t}a$$

このとき

$$\frac{d}{dt}S(a,t) = -2 \cdot \frac{1-(1+\log t)}{t^2} - \frac{a}{t^2}$$

$=\dfrac{2\log t-a}{t^2}$　　　　ここで $\dfrac{d}{dt}S(a,t)=0$　をみたすのは $t=e^{\frac{a}{2}}$ のときで

右の増減表より

$t=e^{\frac{a}{2}}$ のとき、$S(a,t)$ は最小となる。

$m(a)=S(a,e^{\frac{a}{2}})$

$$=-2\cdot\frac{\log e^{\frac{a}{2}}+1}{e^{\frac{a}{2}}}+1+e^{-a}+\frac{a}{e^{\frac{a}{2}}}$$

$$=-2\left(\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}\right)+1+e^{-a}+ae^{-\frac{a}{2}}$$

$$=\left(e^{-\frac{a}{2}}\right)^2-2e^{-\frac{a}{2}}+1$$

$$=\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2$$

（ⅲ）　$\log t\leqq 0$　$(0<t\leqq 1)$　　のとき

$$S(a,t)=-\int_0^a\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$

$$=-\left[\,-e^{-x}-\frac{1}{t}x\,\right]_0^a$$

$$=e^{-a}+\frac{1}{t}a-e^0$$

$$=e^{-a}+\frac{1}{t}a-1$$

　　　　このとき

$\dfrac{d}{dt}S(a,t)=-\dfrac{a}{t^2}>0$　これより $0<\ t\leqq1$ のとき $S(a,t)$ は単調減少なので最小値 $m(a)$ は

$m(a)=S(a,1)=e^{-a}+a-1$

（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）　より右の増減表を得る。よって

最小値は $t=e^{\frac{a}{2}}$ のときで

$$m(a)=\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2$$

(2)

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{\left(e^{-\frac{a}{2}}-1\right)^2}{a^2}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}}-1}{-\frac{a}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Uparrow$$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$　を使います。