チャレンジしてみての感想はどうでしたか？

正数 a に対して、放物線 $y=x^2$ 上の点 A (a , a^2) における接線を、A を中心に -30° 回転した直線を l とする。l と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに、点 (a , 0) を C 、原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC 、CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$, 線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき、

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$$ を求めよ。

以下に解答があります。

公式を使ったり、計算の工夫をしたりしました。

解答

(1)

右下図のように

$y=x^2$ より、$y'=2x$ なので、点 A (a , a^2) における接線の傾きは $2a$ である。

x 軸正方向とのなす角を β として

$$\tan\beta=2a$$

この接線と点 A を中心に -30° 回転した直線 l の x 軸正方向との

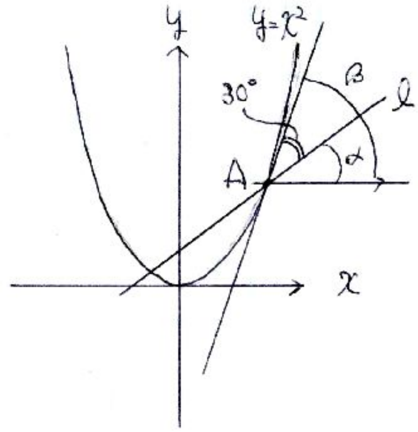
なす角を α とすると傾きは $\tan\alpha$ である。

＊1

傾き$=\tan\theta$ とするのはなす角の基本！

2 直線のなす角が 30° なので

$\beta-\alpha=30^\circ$ である。



これらより（ tan の加法定理）

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\therefore \tan 30^\circ=\frac{2a-\tan\alpha}{1+2a\tan\alpha}$$

これを $\tan\alpha$ について解いて

$$\tan\alpha=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\quad (=l \text{ の傾き})$$

よって、求める直線 l は

$$y=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$$

＊２

←通る点 (p , q) , 傾き m の直線は

$\underline{\underline{y=m(x-p)+q}}$

(2)

$y=x^2$ と l の交点は、

$$x^2=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$$

＊３

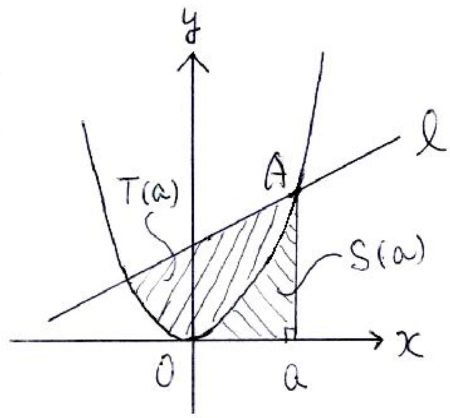
解の一つは a と分かっているので

a との積が $\underline{\dfrac{2\sqrt{3}a^2-a}{2a+\sqrt{3}}-a^2}$ になっている

ものを選べばよい

⇓

$$\therefore x^2-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}x+\underline{\frac{2\sqrt{3}a^2-a}{2a+\sqrt{3}}-a^2}=0 \quad \rightleftarrows \quad (x-a)\left(x-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}+a\right)=0$$



$$T(a)=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2-x^2\right\}dx$$

$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\beta)(x-\alpha)\,dx=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\left(2a-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3$$

また、$S(a)$ は

$$S(a)=\int_0^a x^2\,dx=\frac{1}{3}a^3$$

よって、これらより

$$\frac{T(a)}{S(a)}=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{1}{6}\left(2a-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a^2+\sqrt{3}a}\right)^3=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\frac{2\sqrt{3}}{a}-\frac{1}{a^2}}{2+\frac{\sqrt{3}}{a}}\right)^3$$

$$\to\frac{1}{2}\cdot 2^3=4\quad(a\to\infty)$$

最後の極限計算を除けば数Ⅱの範囲です。しかも式が少し煩雑というだけでしょう。東工大はこれが解けても合格ではありませんが、これが解けなければ始まりません。

File.1 は必ずゲットの問題１としました。